

## Capítulo 6

### P 6.1

Resolução:

Como o intervalo da tabela não é constante, temos que escrever a fórmula para dois pedaços, um para o passo  $h = 0,2$  e outra para o passo  $h = 0,4$ :

$$I = \frac{0,2}{2} [1,000 + 2 \times (1,408 + 1,864) + 2,416] + \frac{0,4}{2} (2,416 + 4,000) = 2,2792$$

Resposta:  $I = 2,279$ .

### P 6.2

Resolução:

Vamos calcular o passo e construir a tabela:

$$h = \frac{1 - 0}{4} = 0,25$$

$x$	0	0,25	0,50	0,75	1
$e^{2x}$	1,000	1,649	2,718	4,482	7,389

$$I = \frac{0,25}{2} [1,000 + 2 \times (1,649 + 2,718 + 4,482) + 7,389] = 3,261$$

Calculando o erro de truncamento:

$$f(x) = e^{2x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2e^{2x} \quad \rightarrow \quad f''(x) = 4e^{2x}$$

Como a função  $f(x) = e^{2x}$  é crescente, temos que:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| = f''(1) = 4e^{2 \cdot 1} = 29,556$$

Então, como o número de partes  $k = 4$ ,

$$E_T \leq k \cdot \frac{h^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| = 4 \cdot \frac{(0,25)^3}{12} \cdot 29,556 = 0,15$$

Resposta:  $I = 3,261 \pm 0,15$ .

**P 6.3**

Resolução:

Lembrando que a fórmula do erro de truncamento da regra dos trapézios é,

$$E_T \leq k \cdot \frac{h^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \leq 0,01$$

Vamos escrever  $k$  e  $h$  em função do número de pontos:

$$h = \frac{b-a}{n-1} = \frac{1-0}{n-1} = \frac{1}{n-1}$$

$$k = n - 1$$

Calculando agora  $\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ :

$$f(x) = \sin(3x) \rightarrow f'(x) = 3 \cdot \cos(3x) \rightarrow f''(x) = -9 \sin(3x)$$

Como a função  $\sin(3x)$  é crescente no intervalo  $[0,1]$ , temos:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| = |f''(1)| = 9 \sin(3.1) = 1,27$$

Voltando na fórmula do erro de truncamento,

$$k \cdot \frac{h^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \leq 0,01 \rightarrow (n-1) \cdot \frac{\left(\frac{1}{n-1}\right)^3}{12} \cdot 1,27 \leq 0,01$$

$$\left(\frac{1}{n-1}\right)^2 \leq \frac{0,01 \times 12}{1,27} \rightarrow (n-1)^2 \geq \frac{1,27}{0,01 \times 12}$$

$$(n-1)^2 \geq 10,583 \rightarrow n-1 \geq \sqrt{10,583}$$

$$n-1 \geq 3,253 \rightarrow n \geq 4,253$$

Resposta:  $n = 5$ .

**P 6.4**

Resolução:

Primeiro vamos determinar os pontos em que as funções se encontram e depois tabelar a função  $|f(x) - g(x)|$ :

$$x^2 + 1 = -x^2 + 3 \rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \rightarrow 2x^2 = 2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$x$	-1	-0,5	0	0,5	1
$ f(x) - g(x) $	0	1,50	2,00	1,50	0

Como a fórmula mais precisa é a de Simpson, vamos aplicá-la:

$$I = \frac{0,5}{3} [0 + 4 \times 1,50 + 2 \times 2,00 + 4 \times 1,50 + 0] = 2,67$$

Resposta:  $I = 2,67$ .

### P 6.5

Resolução:

Observamos que o passo é constante igual a  $h = 0,4$ . Como o número de pontos é par, devemos aplicar a fórmula de Simpson para 5 pontos e no último intervalo aplicamos a regra dos trapézios:

$$\begin{aligned} I &= \frac{0,4}{3} [1,000 + 4 \times 1,146 + 2 \times 1,255 + 4 \times 1,342 + 1,415] + \frac{0,4}{2} [1,415 + 1,477] \\ &= 2,562 \end{aligned}$$

Calculando os erros de truncamentos, devemos calcular um erro de truncamento para o intervalo que aplicamos a fórmula de Simpson e outro para o intervalo que usamos a regra dos trapézios.

Erro de Simpson:

$$E_T \leq \frac{k}{2} \cdot \frac{h^5}{90} \max_{a \leq x \leq b} |f''''(x)|$$

Calculando  $\max_{a \leq x \leq b} |f''''(x)|$ . Como  $D^j f(x) \leq \frac{1}{j}$ , então:

$$f''''(x) \leq \frac{1}{4}$$

Logo,

$$E_T \leq \frac{4}{2} \cdot \frac{0,4^5}{90} \frac{1}{4} = 5,7 \times 10^{-5} = 0,000057$$

Erro de trapézio:

$$E_T \leq k \cdot \frac{h^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Calculando  $\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ . Como  $D^j f(x) \leq \frac{1}{j}$ , então:

$$f''(x) \leq \frac{1}{2}$$

Logo,

$$E_T \leq 1. \frac{0,4^3}{12} \frac{1}{2} = 0,003$$

Somando os erros:  $E_T = 0,000057 + 0,003 = 0,003$

Resposta:  $I = 2,562 \pm 0,003$

### P 6.6

Resolução:

Observamos que nos dois primeiros intervalos, o passo  $h = 0,8$  e no último intervalo o passo  $h = 1,0$ . Então vamos aplicar a fórmula de Simpson nos dois primeiros intervalos e a regra dos trapézios no último intervalo:

$$I = \frac{0,8}{3} [4,079 + 4 \times 6,128 + 7,197] + \frac{1,0}{2} [7,197 + 8,302] = 17,293$$

Calculando os erros de truncamentos, devemos calcular um erro de truncamento para o intervalo que aplicamos a fórmula de Simpson e outro para o intervalo que usamos a regra dos trapézios.

Erro de Simpson:

$$E_T \leq \frac{k}{2} \cdot \frac{h^5}{90} \max_{a \leq x \leq b} |f''''(x)|$$

Calculando  $\max_{a \leq x \leq b} |f''''(x)|$ . Como  $D^j f(x) \leq \frac{x \cdot f(x)}{j}$ , então:

$$f''''(x) \leq \frac{x \cdot f(x)}{4} \rightarrow \begin{cases} \frac{0,4 \times 4,079}{4} = 0,4079 \\ \frac{1,2 \times 6,128}{4} = 1,8384 \\ \frac{2,0 \times 7,197}{4} = 3,5985 \end{cases} \rightarrow \max_{0,4 \leq x \leq 2,0} |f''''(x)| = 3,5985$$

Logo,

$$E_T \leq \frac{4}{2} \cdot \frac{0,8^5}{90} 3,5985 = 0,0262$$

Erro de trapézio:

$$E_T \leq k \cdot \frac{h^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Calculando  $\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ . Como  $D^j f(x) \leq \frac{x f(x)}{j}$ , então:

$$f''(x) \leq \frac{x \cdot f(x)}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{2,0 \times 7,197}{2} = 7,197 \\ \frac{3,0 \times 8,302}{2} = 12,453 \end{cases} \rightarrow \max_{2,0 \leq x \leq 3,0} |f''(x)| = 12,453$$

Logo,

$$E_T \leq 1 \cdot \frac{1,0^3}{12} 12,453 = 1,03775$$

Somando os erros:  $E_T = 0,0262 + 1,03775 = 1,064$

Resposta:  $I = 17,293 \pm 1,06$

### P 6.7

Resolução:

Lembrando que a fórmula do erro de truncamento de Simpson é,

$$E_T \leq \frac{k}{2} \cdot \frac{h^5}{90} \max_{a \leq x \leq b} |f''''(x)| \leq 0,001$$

Vamos escrever  $k$  e  $h$  em função do número de pontos:

$$h = \frac{b-a}{n-1} = \frac{1-0}{n-1} = \frac{1}{n-1}$$

$$k = n-1$$

Calculando agora  $\max_{a \leq x \leq b} |f''''(x)|$ :

$$f'(x) = 3 \cdot e^{3x} \rightarrow f''(x) = 9 \cdot e^{3x} \rightarrow f'''(x) = 27 \cdot e^{3x} \rightarrow f''''(x) = 81 \cdot e^{3x}$$

Como a função  $e^{3x}$  é crescente, temos:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f''''(x)| = |f''''(1)| = 81 \cdot e^{3 \cdot 1} = 1626,9285$$

Voltando na fórmula do erro de truncamento,

$$\frac{k}{2} \cdot \frac{h^5}{90} \max_{a \leq x \leq b} |f''''(x)| \leq 0,001 \rightarrow \frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{n-1}\right)^5}{90} \cdot 1626,9285 \leq 0,001$$

$$\left(\frac{1}{n-1}\right)^4 \leq \frac{0,001 \times 2 \times 90}{1626,9285} \rightarrow (n-1)^4 \geq \frac{1626,9285}{0,001 \times 2 \times 90}$$

$$(n-1)^4 \geq 9038,4916 \rightarrow n-1 \geq \sqrt[4]{9038,4916}$$

$$n - 1 \geq 9,75 \quad \rightarrow \quad n \geq 10,75$$

Resposta:  $n = 11$ .

### P 6.8

Resolução:

Primeiro vamos determinar o passo e depois determinar a tabela:

$$h = \frac{2 - 1}{5 - 1} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$x$	1	1,25	1,50	1,75	2
$\ln x$	0	0,223	0,405	0,560	0,693

Aplicando a fórmula de Simpson,

$$I = \frac{0,25}{3} [0 + 4 \times 0,223 + 2 \times 0,405 + 4 \times 0,560 + 0,693] = 0,386$$

Calculando o erro de truncamento:

$$f(x) = \ln x \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \rightarrow \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

Como a função  $f(x) = \frac{6}{x^4}$  é decrescente, temos que:

$$\max_{1 \leq x \leq 2} |f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(1)| = \frac{6}{1^4} = 6$$

Então, o número de partes  $k = 4$ ,

$$E_T \leq \frac{k}{2} \cdot \frac{h^5}{90} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| = \frac{4}{2} \cdot \frac{(0,25)^5}{90} \cdot 6 = 0,00013$$

Resposta:  $I = 0,386 \pm 0,00013$ .